# ΜΗ ΟΜΟΓΕΝΗΣ ΓΔΕ

$(E): a_n y^{(n)}(x) + \cdots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = b$ , $a_n(x) \neq 0$, $x \in I$
και $a, b \in C(I)$
Είχαμε ορίσει τον $L$: γραμμικό συντελεστή

$L(y) = a_n y^{(n)}(x) + \cdots + a_0 y(x)$
και μάλιστα $L(c_1 y_1 + c_2 y_2) = c_1 L(y_1) + c_2 L(y_2)$

## ΘΕΩΡΗΜΑ 1:

Ας είναι $y_M$: μερική λύση της $(E)$, τότε η $y$ λύση της $(E)$ αν-ν $\exists\, \tilde{y}$ λύση της $(E_0)$ με $y = y_M + \tilde{y}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$(\Rightarrow)$: Υποθέτουμε ότι $y_M$: μερική λύση και $y$ λύση της $(E)$ τότε

$L(y_M) = b$ και $L(y) = b$

Παίρνουμε τη διαφορά $y - y_M = \tilde{y}$

Παρατηρούμε ότι

$L(\tilde{y}) = L(-y_M + y) \overset{\text{γραμ.}}{=} -L(y_M) + L(y) = b - b = 0$

δηλ. η $\tilde{y}$ είναι λύση της $(E_0)$ με: $y = y_M + \tilde{y}$

$(\Leftarrow)$: Έστω $y_M$: μερική λύση και $\tilde{y}$ λύση της $(E)$ και $(E_0)$ αντίστοιχα. Για την $y = y_M + \tilde{y}$ ⇝
⇝ $L(y) = L(y_M) + L(\tilde{y}) = b + 0 \Rightarrow L(y) = b$ άρα η $y$ λύση της $(E)$

## ΘΕΩΡΗΜΑ 2 (ΥΠΕΡΘΕΣΗ)

Ας είναι $b_1, b_2, \ldots, b_n \in C(I)$ με $b = b_1 + \cdots + b_n$ αν $y_1, \ldots, y_n$ λύσεις των εξισώσεων $L(y_i) = b_i$, $i = 1, \ldots, n$ τότε η συνάρτηση $y = y_1 + \cdots + y_n$ είναι λύση της $L(y) = b$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Είναι $L(y) = L(y_1 + \cdots + y_n) = L(y_1) + \cdots + L(y_n) = b_1 + \cdots + b_n = b$.

## ΘΕΩΡΗΜΑ 3 (Θ. ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΤΩΝ ΣΤΑΘΕΡΩΝ)

Ας είναι $\{y_1, \dots, y_n\}$ ένα ΒΣΛ της $(E_0)$. Εάν $v_1, \dots, v_n$ είναι λύσεις τέτοιες ώστε:

$$\begin{cases} v_1' y_1 + \dots + v_n' y_n = 0 \\ v_1' y_1' + \dots + v_n' y_n' = 0 \\ \vdots \\ v_1' y_1^{(n-2)} + \dots + v_n' y_n^{(n-2)} = 0 \\ v_1' y_1^{(n-1)} + \dots + v_n' y_n^{(n-1)} = \frac{a_n}{b} \end{cases}$$

τότε μια μερική λύση της $(E)$ είναι η

$$y = y_1 v_1 + \dots + y_n v_n.$$

**Παράδειγμα:**

$$y'' - 5y' + 6y = 3x \quad (E)$$

$$y'' - 5y' + 6y = 0 \quad (E_0)$$

**Λύση**

Επιλύοντας την $(E_0)$ βρίσκαμε

$y_1 = e^{3x}$ και $y_2 = e^{2x}$

όπου

$W(y_1, y_2)(x) \neq 0 \Rightarrow$ γραμμ. ανεξάρτητες $\Rightarrow$ ΒΣΛ $\{e^{3x}, e^{2x}\}$

Έπειτα,

$$\left.\begin{matrix} v_1' e^{3x} + v_2' e^{2x} = 0 \\ v_1' \cdot 3 \cdot e^{3x} + v_2' \cdot 2 e^{2x} = 3x \end{matrix}\right\| \Rightarrow \left.\begin{matrix} v_1' = \dots \\ v_2' = \dots \end{matrix}\right\| \Rightarrow \begin{matrix} v_1 = \dots \\ v_2 = \dots \end{matrix}$$

(Προσοχή: ότι ολοκληρώσεις και να κανατε για την εύρεση των $v_1$ και $v_2$ δεν επηρεάζουν το σύνολο των λύσεων)

Και έπειτα,

$y = v_1 y_1 + v_2 y_2$ είναι μερική λύση της $(E)$

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ (ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ)**

$$y_M = v_1 \cdot y_1 + \dots + v_n \cdot y_n$$

$$y_M' = \underbrace{\cancel{v_1' \cdot y_1 + \dots + v_n' \cdot y_n}}_{1^η \text{ εξίσωση}}{}^{\to 0} + v_1 \cdot y_1' + \dots + v_n y_n' = v_1 y_1' + \dots + v_n y_n'$$

$$y_M'' = \underbrace{\cancel{v_1' y_1' + \dots + v_n' y_n'}}_{2^η \text{ εξίσωση}}{}^{\to 0} + v_1 y_1'' + \dots + v_n \cdot y_n''$$

$\vdots$

$\vdots$

$$y_\mu^{(n-2)} = \underbrace{\cancel{v_1' \cdot y_1^{(n-2)} + \dots + v_n' \cdot y_n^{(n-2)}}}_{(n-1)^{\eta} \text{ εξίσωση}} + v_1 \cdot y_1^{(n-1)} + \dots + v_n y_n^{(n-1)}$$

$$y_\mu^{(n-1)} = \underbrace{\cancel{v_1' \cdot y_1^{(n-1)} + \dots + v_n' y_n^{(n-1)}}}_{n^{\eta} \text{ εξίσωση}} + v_1 y_1^{(n)} + \dots + v_n \cdot y_n^{(n)}$$

πολ/ζω αντίστοιχα τις $y_\mu, y_\mu', y_\mu'', \dots, y_\mu^{(n-2)}, y_\mu^{(n-1)}$ με $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$

$$L(y_\mu) = v_1 \left[ \alpha_0 y_1 + \alpha_1 y_1' + \alpha_2 y_1'' + \dots + \alpha_{n-1} y_1^{(n-1)} + \alpha_n y_1^{(n)} \right] + \alpha_n \frac{b}{\alpha_n} + v_2 \left[ \alpha_0 y_2 + \alpha_1 y_2' + \alpha_2 y_2'' + \dots + \alpha_{n-1} y_2^{(n-1)} + \alpha_n y_2^{(n)} \right] \dots + v_n \left[ \alpha_0 y_n + \alpha_1 y_n' + \alpha_2 y_n'' + \dots + \alpha_{n-1} y_n^{(n-1)} + \alpha_n y_n^{(n)} \right]$$

$L(y_1)=0$, $L(y_2)=0$, $L(y_n)=0$

δηλ. $L(y_\mu) = b$.

## ΘΕΩΡΗΜΑ 15 (σελ. 88)

Μια μερική λύση της (Ε) δίνεται από τον τύπο

$$y_\mu(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i(x) \int_{x_0}^{x} \frac{W_i(s)}{W(s)} \frac{b(s)}{\alpha_n(s)} \, ds, \quad x \in I$$

## ΘΕΩΡΗΜΑ 16

$$\alpha_2 y'' + \alpha_1 y' + \alpha_0 y = b, \quad (E_2)$$

$$y_\mu(x) = y_1(x) \cdot \int_{x_0}^{x} \frac{W_1(s)}{W(s)} \frac{b(s)}{\alpha_2(s)} ds + y_2(x) \cdot \int_{x_0}^{x} \frac{W_2(s)}{W(s)} \frac{b(s)}{\alpha_2(s)} ds$$

$$= \int_{x_0}^{x} \left( \frac{-y_1(x) y_2(s) + y_2(x) \cdot y_1(s)}{W(s)} \frac{b(s)}{\alpha_2(s)} \right) ds$$

## ΘΕΩΡΗΜΑ 17 (ΑΣΚΗΣΗ)

ΑΣΚΗΣΗ 5 (σελ. 85)

$y''' - 3y'' + 2y = e^x, \ \forall x \in \mathbb{R}$

με $e^{cx}$ λύσεις της ομογενούς

ΛΥΣΗ

$c^3 \cdot e^{cx} + 3c^2 \cdot e^{cx} + 2c \cdot e^{cx} = 0$

$e^{cx}(c^3 - 3c^2 + 2c) = 0$

$c(c^2 - 3c + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 2 \\ c_3 = 1 \end{cases}$

Άρα $y_1(x) = 1, \quad y_2(x) = e^{2x}, \quad y_3(x) = e^x$

$W(y_1, y_2, y_3)(x) = -2e^{3x} \neq 0 \Rightarrow$ γραμμ. ανεξάρτητες λύσεις

$\Rightarrow \{y_1, y_2, y_3\}$ ΒΣΛ

και συνεχίζουμε όπως το Θεώρημα 3 (ή Θεωρ. 15)

Βάση του Θεωρήματος 3:

$v_1' \cdot 1 + v_2' \cdot e^{2x} + v_3' \cdot e^x = 0$

$v_1' \cdot 0 + v_2' \cdot 2e^{2x} + v_3' \cdot e^x = 0$

$v_1' \cdot 0 + v_2' \cdot 4e^{2x} + v_3' e^x = e^x$

$y_M = v_1 \cdot 1 + v_2 e^{2x} + v_3 \cdot e^x$ ← μερ. λύσης

$\{ y = y_M + c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot e^{2x} + c_3 \cdot e^x, \ x \in \mathbb{R} \}$ ← Γενική λύση